Tbop@infonie.fr

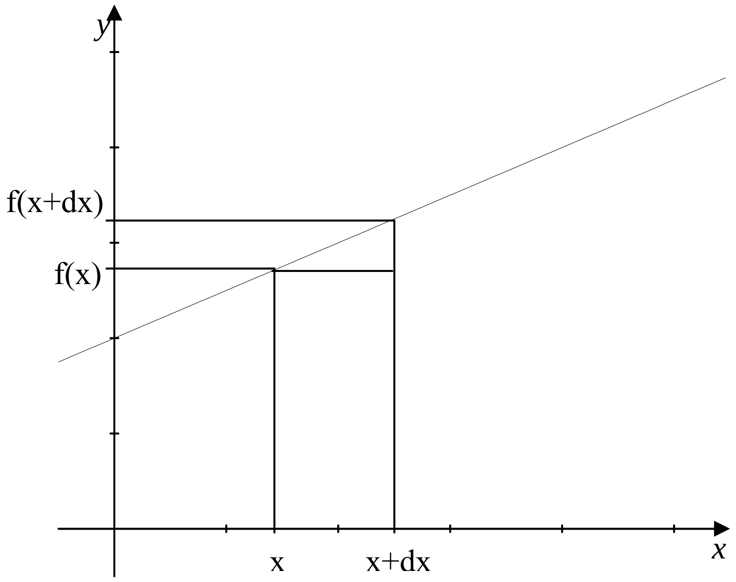
Périmètre de la représentation graphique d'une fonction f(x)

1) Introduction

Le but de cette recherche et de trouver comment calculer le périmètre de la représentation graphique d'une fonction quelconque f(x) sur un intervalle [a ; b] (a et b $\in \mathbb{R}$) ; car après de maintes heures de recherche sur Internet nous n'avons toujours pas trouvé un quelconque site présentant aussi bien la démonstration que le concept.

2) Approche graphique

Pour nous aider à raisonner nous allons faire un dessin d'une courbe quelconque qu'on aurait zoomé un bon nombre de fois afin qu'elle puisse s'apparenter à une droite, puis on va tout simplement l'annoter afin de nous éclaircir un peu plus :



3) Intuition

On a maintenant l'intuition d'utiliser le bon vieux théorème de Pythagore car on voit clairement apparaître un triangle rectangle et le but à atteindre serait de calculer la longueur de son hypoténuse :

* Calcul du côté « horizontal » : côté horizontal = x + dx – x = dx

D'où : côté horizontal² = dx² (on note qu'élevé au carré dx est encore plus négligeable)

* Calcul du côté « vertical » : côté vertical = f(x + dx) – f(x) = f'(x)dx

D'où : côté vertical = f'(x)²dx²

On utilise maintenant le théorème de Pythagore :

* longueur de l'hypoténuse = $\sqrt{dx^2 + f'(x)^2 dx^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$

Si on subdivise l'intervalle [a ;b] en des triangles rectangles de plus en plus petit le périmètre de la courbe correspond à la somme de toutes les longueurs d'hypoténuses de ces mêmes triangles. Plus le pas de la subdivision est petit plus la précision est grande, on en déduit que la somme de ces longueurs tend à converger vers $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ lorsque le pas tend vers 0

4) <u>Application</u>

Périmètre d'un demi-cercle de rayon R et de centre l'origine du repère (en toute logique on devra trouver πR) :

On sait que l'équation d'un demi-cercle de centre O et de rayon R est : f(x) = $\sqrt{R^2 - x^2}$

* On calcule f'(x) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{R^2 - (x+h)^2} - \sqrt{R^2 - x^2}}{h}$$

On multiplie par le conjugué et après calcul on trouve :

$$\lim_{h \to 0} \frac{-2hx - h^2}{h(\sqrt{R^2 - (x+h)^2} + \sqrt{R^2 - x^2})}$$

On simplifie par h, puis on fait tendre h vers 0 et on trouve :

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

On calcule ensuite $\sqrt{1 + f'(x)^2}$:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Et on doit finalement calculer l'intégrale :

$$\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx$$

Ce qui donne après une recherche active sur Internet de la primitive de cette fonction :

$$\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = \left[R \cdot Arc\sin(\frac{x}{R}) \right]_{-R}^{R}$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = R \cdot [Arc\sin(1) - Arc\sin(-1)]$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \cdot \pi$$

Donc on en déduit par la même occasion le périmètre d'un cercle :

$$2\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \cdot R$$