Exercice 5 :

Soit K le corps Q, R ou C. On considère l'application φ de $K_3[X]$ dans K^4 définie par :

$$\forall P \in K_3[X],\ \varphi(P) = (P(0), P'(0), P(1), P'(1)).$$

5.a Montrer que φ est un isomorphisme de K-ev de $K_3[X]$ dans K^4.

Réponse :

- Bon démontrer que φ c'est un morphisme c'est fait.
- Pour démontrer que φ c'est un isomorphisme je tente de démontrer que rg φ = 4 et que est φ injectif, ce qui me donne normalement l'équivalence que φ est un isomorphisme :
- J'ai démontré rg φ = 4
- Voilà où je bloque :

Soit $P \in \ker \varphi$, ie $P \in K_3[X]$ et $\varphi(P) = 0$

P s'écrit de façon unique sous la forme :

$P = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i$ où $\forall i \in [0\ ;3]$, $a_i \in K$

On résout le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} P(0) = a_1 = 0 \\ P'(0) = a_2 = 0 \\ P(1) = a_3 + a_4 = 0 \\ P'(1) = a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

J'en arrive donc à la conclusion que $\ker \varphi = \{P \in K_3[X] \ /\ a_3 = -a_4\}$

Or moi j'aimerai bien $\ker \varphi = \{0_{K4}\}$